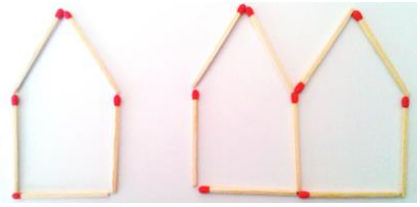
Problème algèbre 5e

Les cabanons

Apolline et Victor sont en camp d'été à la mer. Pendant les heures les plus chaudes, en dessous de leur parasol, ils regardent les cabines de plage et s'amusent à en reproduire avec des allumettes selon le modèle ci-dessous :



a) Combien faut-il d'allumettes pour construire 2 cabines ? 4 cabines ? 8 cabines ? 264 cabines ? pour n'importe quel nombre de cabines ?
b) Vrai ou faux ? Le nombre d'allumettes nécessaires est toujours impair.
c) On dispose de 689 allumettes, combien de cabines peut-on construire ? et avec 999 allumettes ?

Cycles : cycle 4 **Classe :** 5e
Domaine: Algèbre, Nombres et calculs -Utiliser le calcul littéral
A ce niveau, ce problème peut être proposé pour aborder l'algèbre et en particulier l'introduction de la lettre dans le cadre des problèmes de généralisation pour a), de preuves pour b) et d'équations pour c).
Mots clefs : Formule, Généralisation, Preuve, Nombre pair/impair, Pattern

1 - Objectifs et notions ciblées

L'objectif de ce problème est d'introduire la lettre dans le cadre d'un problème nécessitant une généralisation pour a), de preuves pour b) et d'équations pour c).
Ce problème permet de travailler sur l'établissement d'une formule exprimée sous forme d'un programme de calcul ou d'une expression comportant des symboles. Lors de la mise en commun, l'enseignant·e pourra s'appuyer sur les formules produites pour les transformer en expressions littérales.
La question b) permettra d'introduire la preuve en algèbre et de rappeler qu'un multiple de 4 peut s'écrire 4A (aspect structural de l'algèbre).
Enfin la question c) peut permettre d'introduire la notion d'équations et d'inconnues.

2 - Prérequis

Savoir effectuer un enchaînement d'opérations en respectant les priorités opératoires.

3- Stratégies de résolution attendues / Stratégies de résolution observées

Au départ, un des enjeux est de travailler sur les régularités observées dans la construction des cabines et de les traduire par une formule qui sera alors appliquée pour trouver le nombre d'allumettes pour 264 cabines et ensuite, pour un nombre quelconque de cabines. Plusieurs formules peuvent être produites par les élèves, ce qui rend leur comparaison intéressante lors de la mise en commun.
Pour les cas 2, 3, 4 ou 8 cabines les élèves peuvent dessiner les cabines et compter les allumettes. Ces premières questions ont pour but l'appropriation du problème par les élèves,

c'est-à-dire qu'ils ou elles puissent comprendre les régularités de la construction des cabines, éventuellement commencer à émettre une conjecture pour trouver une formule générale et la valider. Pour le cas 264, les élèves ne peuvent plus dessiner et c'est le choix de ce nombre qui devrait amener les élèves à élaborer une formule exprimée soit sous forme de programme de calcul (par exemple « multiplie le nombre de cabines par 4 et ajoute 1 »), soit avec un début d'écriture symbolique avec A ou All pour allumettes, soit avec une expression littérale pour certains élèves.
Pour la question a) deux stratégies principales peuvent être observées :

- à partir des premiers cas, dégager des régularités (par exemple, chaque cabane est composée de 4 allumettes et à la fin on ajoute 1 allumette ou bien pour chaque cabane, il y a 2 allumettes pour chaque toit, 1 pour le plancher et 1 pour le mur et à la fin on ajoute 1 allumette, etc…)
- en observant les cas 2, 3 et 4, remarquer, par exemple, que pour passer d'un cas au suivant, on rajoute 4 allumettes.

Les réponses aux questions b) et c) vont dépendre de la formule produite en a). Par exemple, si la formule est 4 fois le nombre de cabines plus 1 (ou 4n + 1), les élèves peuvent indiquer que le nombre d'allumettes est la somme d'un multiple de 4 (qui est donc pair) auquel on ajoute 1. Donc le nombre d'allumettes est toujours impair.
Pour la question c), avec la même formule, les élèves peuvent « remonter les calculs », c'est-à-dire, enlever 1 au nombre d'allumettes donné (689- 1) et ensuite diviser par 4. Pour 999 allumettes, il leur faudra utiliser la division euclidienne.

4- Difficultés et erreurs des élèves

On a observé que lors du passage de 4 à 8 cabines (sans dessiner les 8 cabines) certains élèves utilisent la proportionnalité. Il est intéressant de permettre la discussion sur ce point pour montrer une situation de non proportionnalité.
Pour la question b) certains élèves constatent que le nombre est impair pour les cas étudiés et concluent que c'est toujours vrai.
Pour c) le cas 999 peut être une difficulté puisqu'il reste des allumettes.

5- Mise en œuvre de la séance / Moyens pour aider les élèves /Trace écrite :

Institutionnalisation *(qu'est-ce la classe doit retenir ?)*

Prévoir une séance et demi avec un scénario classique de résolution de problèmes :

- travail individuel de 10 minutes pour que chaque élève puisse entrer dans le problème et faire quelques essais ;
- travail en groupes de 4 élèves de 30-40 minutes pour établir une ou plusieurs formules et qui doit déboucher sur une production commune du groupe qui sera exposée et discutée en collectif lors de la mise en commun ;
- mise en commun dans laquelle les différentes formules produites seront présentées, discutées et validées, puis transformées en expressions littérales pour a). Discussion sur les arguments produits pour b) (notamment on ne peut pas prouver à partir de quelques cas). Validation des réponses et des procédures pour c)

Durant la mise en commun, selon les productions des élèves, l'enseignant·e pourra discuter de l'équivalence de certaines écritures.
Elle ou il pourra demander aux élèves d'utiliser les expressions littérales pour trouver d'autres résultats (par exemple pour 150 cabines, 500 cabines, etc).
Pour l'institutionnalisation, on pourra dans un premier temps lister toutes les formules produites ainsi que les expressions littérales correspondantes. Puis, « pour trouver le nombre d'allumettes pour n'importe quel nombre de cabines, nous avons écrit une expression littérale en utilisant une lettre qui représente le nombre de cabines. Cette expression nous permet de trouver tout de suite, sans utiliser le dessin, le nombre d'allumettes. La lettre utilisée s'appelle une variable ».

6- Prolongements possibles

Proposer d'autres situations de ce type en demandant plus rapidement les expressions littérales.
Proposer des programmes de calcul pour prouver (voir FICHE …)

7- Références

Coppé, S. (2020). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire : une entrée par les programmes de calculs. In H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner & M. Larguier (dir.) *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherche et perspectives curriculaires. Québec, Canada* (pp. 21-43). Livres en ligne du CRIRES. https ://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee- algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches
Coppé, S. Grugeon, B. & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : l'exemple du carré bordé. Petit x 102, 57-80.
site SESAMES Algèbre
http://pegame.ens-lyon.fr/pegame.ens-lyon.fr/index.html
Les guides fondamentaux pour enseigner. La résolution de problèmes mathématiques au collège : Patterns .Des problèmes pour travailler les pensées algorithmique et algébrique (page 110) . https://eduscol.education.fr/document/13132/download

Ce contenu est sous licence Creative Commons Attribution – Non Commercial – Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)